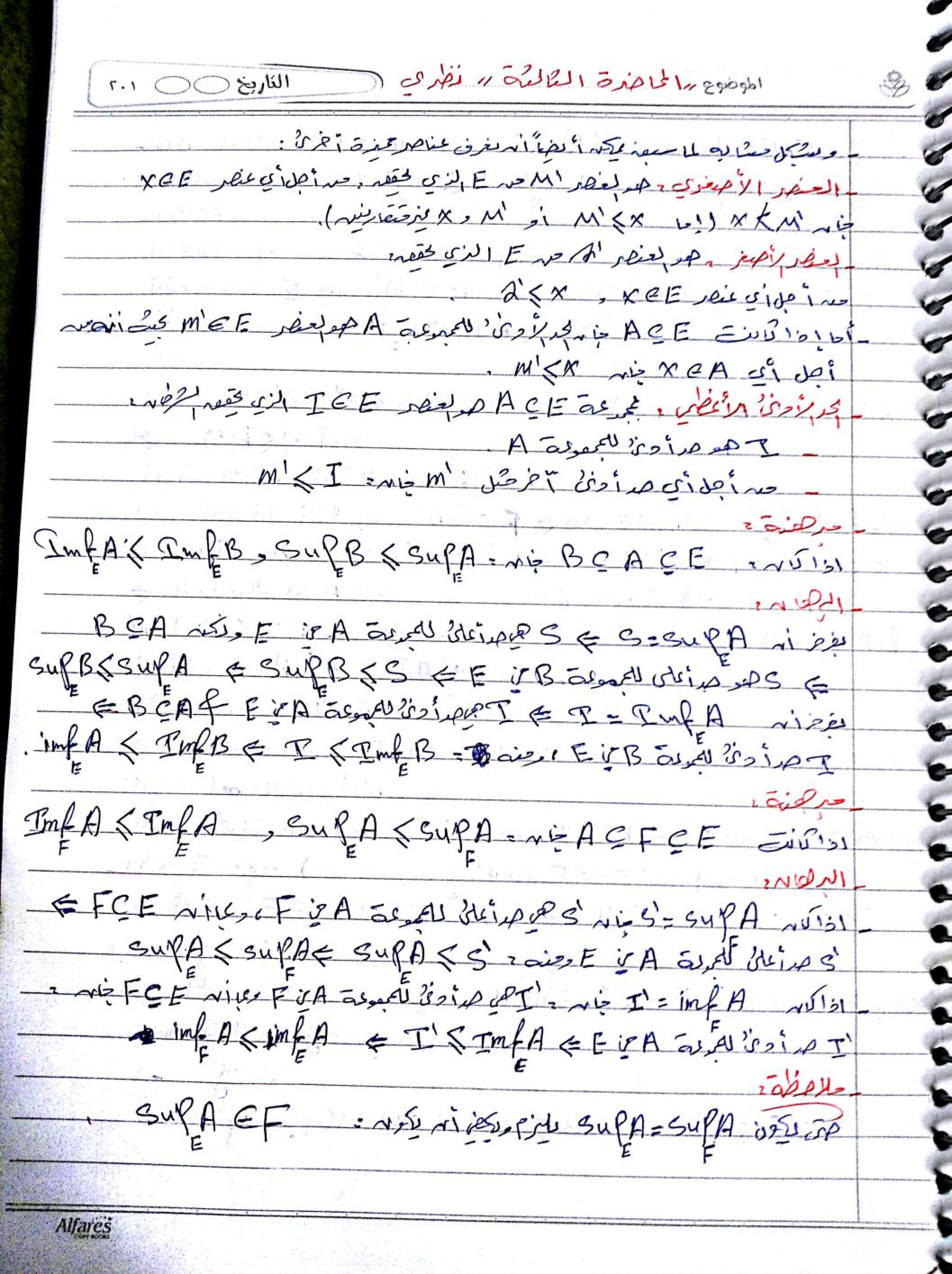


- وبشكل مشابه لما سبق يمكننا أيضاً أن نعرف عناصر مميزة أخرى :
- العنصر الأعظمي : هو العنصر M' من E الذي يحقق، من أجل أي عنصر $x \in E$ فإن $x \not> M'$ (إما $x \leq M'$ أو M' و x غير قابلين للمقارنة).
- العنصر الأصغر : هو العنصر a' من E الذي يحقق من أجل أي عنصر $x \in E$ ، $a' \leq x$
- أما إذا كانت $A \subseteq E$ فإن الحد الأدنى للمجموعة A هو العنصر $m' \in E$ بحيث أنه من أجل أي $x \in A$ فإن $m' \leq x$.
- الحد الأدنى الأعظمي : لمجموعة $A \subseteq E$ هو العنصر $I \in E$ الذي يحقق الشرطين :
  - I هو حد أدنى للمجموعة A .
  - من أجل أي حد أدنى آخر وليكن m' فإن : $m' \leq I$
- مبرهنة :

إذا كان $B \subseteq A \subseteq E$ فإن : $\sup_E B \leq \sup_E A$ ، $\inf_E A \leq \inf_E B$

- البرهان :

نفرض أن $S = \sup_E A$ ⇐ S هي حد أعلى للمجموعة A في E ولكن $B \subseteq A$
⇐ S هو حد أعلى للمجموعة B في E ⇐ $\sup_E B \leq S$ ⇐ $\sup_E B \leq \sup_E A$
نفرض أن $I = \inf_E A$ ⇐ I هي حد أدنى للمجموعة A في E و $B \subseteq A$ ⇐
I حد أدنى للمجموعة B في E ، ومنه : $I \leq \inf_E B$ ⇐ $\inf_E A \leq \inf_E B$.

- مبرهنة :

إذا كانت $A \subseteq F \subseteq E$ فإن : $\sup_E A \leq \sup_F A$ ، $\inf_F A \leq \inf_E A$

- البرهان :

إذا كان $S' = \sup_F A$ فإن S' هي حد أعلى للمجموعة A في F ، وبما أن $F \subseteq E$ ⇐
S' حد أعلى للمجموعة A في E ومنه : $\sup_E A \leq S'$ ⇐ $\sup_E A \leq \sup_F A$
إذا كان $I' = \inf_F A$ فإن : I' هي حد أدنى للمجموعة A في F وبما أن $F \subseteq E$ فإن :
I' حد أدنى للمجموعة A في E ⇐ $I' \leq \inf_E A$ ⇐ $\inf_F A \leq \inf_E A$

- ملاحظة :

حتى يكون $\sup_E A = \sup_F A$ يلزم ويكفي أن يكون : $\sup_E A \in F$ ،



- مثال: إذا أخذنا السلسلة العادية $(R, \leqslant)$ وإذا كانت $A = [0,1[\cup [2,3]$ و $B = [0,1[$ فإن $\sup_R A = 3$، $\sup_R B = 1 \leqslant$ فإن $\sup_A B = 2$ ، $\sup_R B = 1 \leqslant$

- مبرهنة:

إذا كانت $f : E \longrightarrow F$ إيزومورفيزم ترتيب وإذا كانت $A \subseteq E$ تملك حد أعلى أصغري S من E فإن $f(A)$ تملك عندئذ حد أعلى أصغري من F وهو $f(S)$

أي أن: $f(\sup_E A) = \sup_F f(A)$

- البرهان:

- لتكن $\forall x' \in f(A)$ توجد $x \in A$ بحيث يكون $x' = f(x)$ ولكن: $x \leqslant S$

$\Leftarrow x' = f(x) \leqslant f(S)$

أي أنه $f(S)$ حد أعلى للمجموعة $f(A)$ من F. وحيدة

- لتكن m' حد أعلى آخر للمجموعة $f(A)$ من $F \Leftarrow$ يوجد $m \in E$ بحيث يكون $m' = f(m)$

ومن أجل أي $x \in A$ فإن $f(x) \leqslant m' = f(m)$ أي أنه: $f(x) \leqslant f(m) \Leftarrow x \leqslant m$ لأن f إيزومورفيزم

$\Leftarrow m$ حد أعلى للمجموعة A في $E \Leftarrow S \leqslant m$ وبما أن f إيزومورفيزم ترتيب $\Leftarrow$

$f(S) \leqslant f(m) = m'$ ومنه ينتج أنه: $f(S)$ هو حد أعلى أصغري للمجموعة $f(A)$ في F

أي أن: $f(\sup_E A) = \sup_F f(A)$.

- المجموعات شبه الاستقرائية:

- نقول عن المجموعة المرتبة E بأنها شبه إستقرائية إذا كانت أي سلسلة جزئية منها (غير خالية) تملك حد أعلى.

- ونقول عن مجموعة بأنها إستقرائية إذا كانت كل سلسلة من E تملك حد أعلى أصغري

- نظرية زورن (دون برهان): إذا كانت E مجموعة شبه إستقرائية فإنه من أجل أي عنصر $a \in E$ يوجد على الأقل عنصر أعظمي M (maximal) من E بحيث يكون $(a \leqslant M)$.

- تمثيل المجموعات المرتبة المنتهية: إذا كانت $(E, \leqslant)$ مجموعة مرتبة و $x, y \in E$ فإننا نقول عن العنصر y بأنه يغطي x إذا كان:

- $x \leqslant y$

- إذا لم يكن بالإمكان إيجاد عنصر مثل z يحقق: $x \leqslant z \leqslant y$.

- مبرهنة: في أي مجموعة مرتبة منتهية يكون:
① كل عنصر غير أصغري يغطي على الأقل عنصراً واحداً.
② كل عنصر غير أعظمي يكون مغطى بعنصر واحد على الأقل.
- البرهان:
① ليكن y عنصر غير أصغري عندئذٍ يوجد عنصر على الأقل مثل x_1 بحيث يكون $x_1 \leq y$ إذا كان y يغطي x_1 يكون قد تم المطلوب.
أما إذا لم يكن كذلك فإنه يوجد عنصر مثل x_2 بحيث يكون $x_1 \leq x_2 \leq y$
إذا كان y يغطي x_2 يكون قد تم المطلوب.
أما إذا لم يكن كذلك فبعدد منتهٍ من العمليات يوجد x_n بحيث يكون y يغطي x_n.
وبالتالي يكون قد تم المطلوب.
② بطريقة مشابهة يمكن الإثبات.
- التمثيل بالرسم (أو بالمخططات):
لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة منتهية فيمكن تمثيلها كما يلي:
- كل عنصر من عناصرها يقابله نقطة واحدة على المخطط.
- إذا كان العنصر y يغطي العنصر x فإن النقطة x ترتبط بالنقطة y بواسطة قطعة مستقيمة بينهما، ويكون صاعدة.
كما أن العناصر الأعظمية (الأعظمية) تشغل الجزء العلوي (العلوي) من الشكل وأن أي عنصرين يكونان متقاربين إذا وفقط إذا كانا مرتبطين فيما بينهما بخط صاعد.
- أمثلة:
في الأمثلة الآتية جميعها مجموعات جزئية منتهية من المجموعات الجزئية $(N^*, |)$.
① $\{6, 12, 18, 36\}$
② $\{2, 3, 6, 7, 9, 42\}$
③ $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$





الموضوع: "المحاضرة الرابعة"

* الشبكات:

تعريف: لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة.

- نقول عن بأن E هي نصف شبكة عليا اذا كان لكل زوج من العناصر $\{x, y\}$ من E عليا حد أعلى أصغري في E ونكتب:

$Sup_E\{x, y\} = x \vee y$ (وتقرأ x أو y) وبعض الكتب تستخدم الرموز:

$x \vee y = x \cup y = x + y$

- نقول بأن E هي نصف شبكة دنيا اذا كان لأي زوج من العناصر $\{x, y\}$ من E عليا حد أدنى أعظمي في E ونكتب:

$Inf\{x, y\} = x \wedge y$ (وتقرأ x و y) وبعض الكتب تستخدم الرموز:

$x \wedge y = x \cap y = x \cdot y$

* نقول عن E بأنها شبكة اذا كانت في نفس الوقت نصف شبكة عليا ودنيا.

- أمثلة:

(1) من أجل أي مجموعة E فإن $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ هي شبكة، فيما اذا كانت X و Y مجموعتان جزئيتان من E يكون:

$X \vee Y = X \cup Y$ $\quad$ $X \wedge Y = X \cap Y$

(2) $(\mathbb{N}^*, |)$ تكون شبكة حيث: $x \vee y = Lcm(x, y)$

المضاعف المشترك البسيط

$x \wedge y = gcd(x, y) \rightarrow$ القاسم المشترك الأكبر

(3) كل سلسلة تكون شبكة حيث:

$x \wedge y = min(x, y)$ $\quad$ $x \vee y = max(x, y)$

- ملاحظة:

في نصف الشبكة العليا $(E, \leq)$ إن قانون الربط $x \vee y$ يحقق الخواص التالية:

- الجامدية (أي $x \vee x = x$)
- التبديلية (أي $x \vee y = y \vee x$)
- التجميعية (أي $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$)

- البرهان:

الخاصيتين الأولى والثانية (الجامدية والتبديلية) واضحتين من التعريف.

الحد الأعلى الأصغري

- برهان التجميعية: لنفرض أنه: $S = x\vee(y\vee z) \Rightarrow (S\geq x) \;\&\; (S\geq y\vee z)$

$\Rightarrow S\geq x \;\&\; S\geq y \;\&\; S\geq z \Rightarrow S\geq x\vee y \;\&\; S\geq z$

$\Rightarrow S\geq (x\vee y)\vee z$ أي أنه S حد أعلى للمجموعة المؤلفة من العنصرين $\{x\vee y, z\}$.

لنأخذ أنه M حد أعلى آخر للمجموعة $\{x\vee y, z\}$ عندئذٍ يكون:

$M\geq x\vee y \;\&\; M\geq z \Rightarrow M\geq x \;\&\; M\geq y \;\&\; M\geq z$

حد أعلى أصغري $\Rightarrow (M\geq x) \;\&\; (M\geq y\vee z) \Rightarrow M\geq x\vee(y\vee z) \Rightarrow M\geq S$

أي أنه S هو حد أعلى أصغري للمجموعة $\{x\vee y, z\} \Rightarrow S=(x\vee y)\vee z$

ومنه نستنتج أن: $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$

ملاحظات:

- إن هذه المبرهنة تكون أيضاً صحيحة من أجل نصف الشبكة الدنيا مع قانون التشكيل الداخلي $x\wedge y$ ($x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$)

- البرهان: السابق يبين أن $S = x\vee(y\vee z)$ ما هو إلا $\sup_E\{x,y,z\}$ يمكن أن نكتب بشكل بسيط $x\vee y\vee z$ بدلاً من $x\vee(y\vee z)$.

* بسهولة يمكن أن نستنتج أنه من أجل أي مجموعة جزئية منتهية غير خالية من نصف شبكة عليا تملك حداً أعلى أصغرياً، نتيجة مماثلة أيضاً من أجل نصف الشبكة الدنيا أي أنه أي مجموعة جزئية منتهية غير خالية من نصف شبكة دنيا تملك حداً أدنى أعظمياً.

* المسألة العكسية:

لتكن E مزودة بقانون تشكيل داخلي والذي نرمز له بـ $x\vee y$ فعندئذٍ هل يمكن تعريف علاقة ترتيب ($\leq$) على E التي تجعلها نصف شبكة عليا.

ويكون $\sup_E\{x,y\} = x\vee y$

الدراسة السابقة تشير إلى وجوب تحقق الشروط التالية:

- القانون $\vee$ يجب أن يحقق الخاصة الجامدية والتبديلية والتجميعية.

- إذا كان $x\leq y \Leftrightarrow \sup_E\{x,y\}=y \Leftrightarrow x\vee y = y$.

- مبرهنة:

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تشكيل داخلي $x\vee y$ والذي يحقق الخواص الجامدية، التبديلية والتجميعية عندئذٍ توجد علاقة ترتيب وحيدة $\leq$ على E، بحيث تكون E

نفرض شبكة عليا ومنه يكون لعنصرين x, y من E فإن $\sup_E\{x,y\} = x \vee y$

البرهان

إن وجدت علاقة ترتيب فهي حتماً تكون معرفة بالشكل:

$x \leq y$ إذا وفقط إذا كان $y = x \vee y$ وستكون وحيدة.

لتكن R علاقة معرفة بالشكل: $x R y \Leftrightarrow x \vee y = y$

- R انعكاسية لأن: $x R x \Leftrightarrow x \vee x = x$ (لأن الخاصة الجامدة محققة).

- R متعدية لأنه بفرض: $x R y$ و $y R z \Leftrightarrow x \vee y = y$ و $y \vee z = z$

$$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$$

ومنه ينتج أن: $x \vee z = z \Leftrightarrow x R z$

- R تخالفية لأنه إذا كان: $\left\{ \begin{array}{l} x R y \Leftrightarrow x \vee y = y \\ y R x \Leftrightarrow y \vee x = x \end{array} \right.$ و لكن $x \vee y = y \vee x$ لأن الخاصة التبديلية محققة.

وبالتالي نجد: $x = y$

ومنه نستنتج أن R علاقة ترتيب على E ونرمز لها بـ: $x \leq y$.

- لنبرهن أن $(E, \leq)$ نصف شبكة عليا:

ليكن $x, y \in E$ فإن $x \leq x \vee y$ وذلك لأن:

$$x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y \Leftrightarrow x \leq x \vee y$$

(لأن الخاصة التجميعية محققة)

بنفس الطريقة نبين أن: $y \leq x \vee y$ أي:

$$y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y \Leftrightarrow y \leq x \vee y$$

(لأن الخاصة التبديلية محققة) — خاصة تجميعية — خاصة جامدة

وبالتالي فإن $x \vee y$ حد أعلى للمجموعة $\{x,y\}$ في E

ليكن M حد أعلى آخر للمجموعة $\{x,y\}$ في E فإن:

$$(x \vee y) \vee M = x \vee (y \vee M) = x \vee M = M \Rightarrow$$

$$(x \vee y) \vee M = M \Leftrightarrow x \vee y \leq M$$

من التعريف

ومنه نستنتج أن $x \vee y$ حد أعلى أصغري للمجموعة $\{x,y\}$ في E وبالتالي

يكون: $\sup_E\{x,y\} = x \vee y$



- ملاحظات:

① يمكن البرهان أيضاً بأن قانون التشكيل الداخلي ($x \wedge y$) والذي يحقق الخواص الجامدية، التبديلية والتجميعية يمكن أن يعرف لنا نصف شبكة دنيا وحيدة مع علاقة الترتيب $x R y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ وحيث يكون: $\inf\{x,y\} = x \wedge y$

② كذلك فإن أي قانون تشكيل داخلي $x T y$ يحقق الخواص الجامدية، التبديلية والتجميعية على المجموعة E يمكن أن يعرف علاقة ترتيب:

- $x \leq_1 y$ والمعرفة بالشكل: $x T y = y$ وتكون عندها $(E, \leq_1)$ نصف شبكة عليا و $x T y = x \vee y$.
- $x \leq_2 y$ والمعرفة بالشكل: $x T y = x$ وتكون عندها $(E, \leq_2)$ نصف شبكة دنيا و $x T y = x \wedge y$.

* حالة الشبكة:

لتكن $(E, \leq)$ شبكة مزودة بقانوني التشكيل $x \vee y$ & $x \wedge y$ وكل منهما يحقق الخواص الجامدية، التبديلية والتجميعية، فهذين القانونين في الحالة العامة مختلفان (باستثناء الحالة التي تكون فيها علاقة الترتيب هي المساواة).

ولكنهما يعرفان نفس علاقة الترتيب أي أن:

$$x \vee y = y \Leftrightarrow x \leq y$$
$$x \wedge y = x \Leftrightarrow x \leq y$$

وبالعكس إذا كانت E مزودة بقانوني تشكيل داخليين $x T y$, $x \perp y$ ويحققان الخواص: الجامدية، التبديلية والتجميعية فإن كل من هذين القانونين يعرف علاقة ترتيب:

$x \leq_1 y \Leftrightarrow x T y = y \Leftrightarrow (E, \leq_1)$ نصف شبكة عليا.

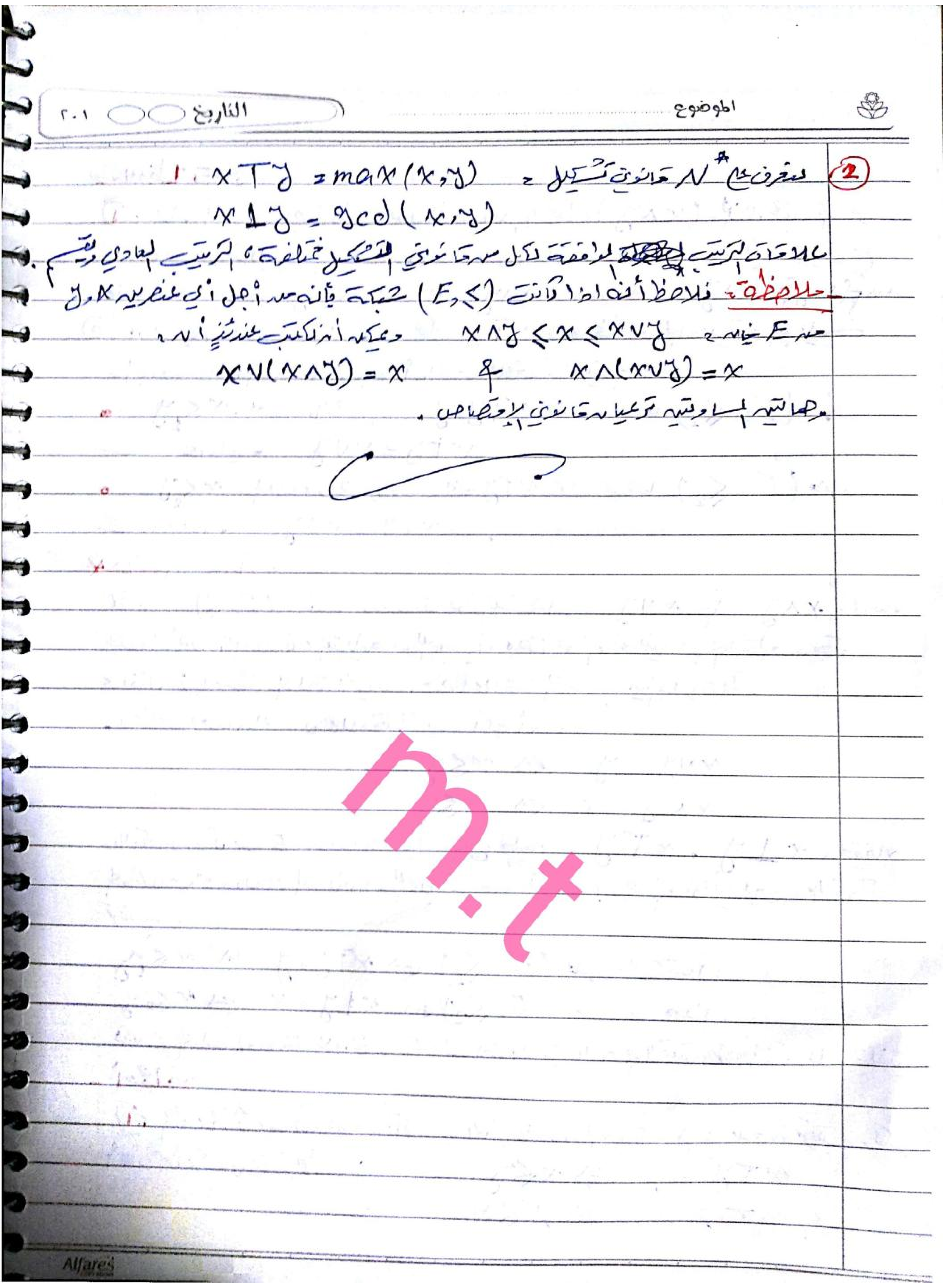
$x \leq_2 y \Leftrightarrow x \perp y = x \Leftrightarrow (E, \leq_2)$ " " دنيا.

لكن في الحالة العامة لا تكون E شبكة لأن هاتين العلاقتين يمكن أن تكونا مختلفتين.

- أمثلة:

① المثال الأول ببساطة هو أن نأخذ في الحالتين نفس القانون فنحصل على علاقة ترتيب ولكن أحدهما عكس الأخرى:

$$x T y = y \Leftrightarrow x \leq y$$
$$x T y = x \Leftrightarrow y \leq x$$



② نعرف على N^* قانوني تشكيل: 1. $x \top y = \max(x,y)$

$$x \perp y = \gcd(x,y)$$

علاقات الترتيب الموافقة لكل من قانوني التشكيل مختلفة، الترتيب العادي وتقسيم.

ملاحظة: فلاحظ أنه إذا كانت $(E,\leq)$ شبكة فإنه من أجل أي عنصرين x و y من E فإن: $x \wedge y \leq x \leq x \vee y$ ويمكن أن نكتب عندئذ أن:

$$x \vee (x \wedge y) = x \quad \& \quad x \wedge (x \vee y) = x$$

وهاتين المساواتين تعرفان بقانوني الامتصاص.